3　方程式・不等式の解法

A

19

与式を x について整理すると，$4(a-2)x-a(a-2)(a-3)>0$

よって，$4(a-2)\left\{x-\dfrac{a(a-3)}{4}\right\}>0$

$a>2$ のとき

$x>\dfrac{a(a-3)}{4}$

この解が $x>1$ だから，$\dfrac{a(a-3)}{4}=1$

これより $a^2-3a-4=0$　$\therefore (a+1)(a-4)=0$　$\therefore a=4$

$a<2$ のとき

$x<\dfrac{a(a-3)}{4}$ となり不適。

よって，求める a の値は 4

20

$ax+y=1$　・・・①

$x+by=1$　・・・②

とする。

①×b－②より，$(ab-1)x=b-1$　・・・③

②×a－①より，$(ab-1)y=a-1$　・・・④

$ab\neq1$ のとき

③，④より，$(x,\ y)=\left(\dfrac{b-1}{ab-1},\ \dfrac{a-1}{ab-1}\right)$

$ab=1$ のとき

②×a より，$ax+aby=a$　$\therefore ax+y=a$　・・・⑤

したがって，①と⑤の連立方程式の解を求めればよい。

よって，$a\neq1$ のとき解なし。

$a=b=1$ のとき $(x,\ y)=(t,\ 1-t)$（t は任意の実数）

以上をまとめると，

$ab\neq1$ ならば $(x,\ y)=\left(\dfrac{b-1}{ab-1},\ \dfrac{a-1}{ab-1}\right)$

$ab=1$ かつ $a=b=1$ ならば $(x,\ y)=(t,\ 1-t)$（t は任意の実数）

$ab=1$ かつ $a\neq1$ ならば解なし

補足

xy 平面上の直線で考えると，

$ab \neq 1$ ならば①と②が平行でないので 1 点で交わる。

$ab = 1$ かつ $a = b = 1$ ならば①と②は同一直線となり，不定解をもつ。

$ab = 1$ かつ $a \neq 1$ ならば①と②は平行となり，共有点をもたない。

21

$$\left|4x^2 - 1\right| - \left|6x^2 - x - 2\right| \geq 0$$

$$\left|4x^2 - 1\right| = \left|(2x+1)(2x-1)\right| = |2x+1||2x-1|$$

$$\left|6x^2 - x - 2\right| = \left|(2x+1)(3x-2)\right| = |2x+1||3x-2|$$

より，

$|2x+1|\{|2x-1| - |3x-2|\} \geq 0$

よって，$2x+1=0$ すなわち $x = -\dfrac{1}{2}$ または $|2x-1| \geq |3x-2|$

$|2x-1| \geq |3x-2|$ については，$|2x-1|^2 \geq |3x-2|^2$ より，$(2x-1)^2 \geq (3x-2)^2$

よって，$\{(2x-1)+(3x-2)\}\{(2x-1)-(3x-2)\} = (5x-3)(-x+1) \geq 0 \quad \therefore \dfrac{3}{5} \leq x \leq 1$

以上より，$x = -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{5} \leq x \leq 1$

補足

$y = \left|4x^2 - 1\right|$ と $y = \left|6x^2 - x - 2\right|$ のグラフから解いてもよい。

22

$\{x(y+1)(x-1)\}^2 + \{y(x+1)(y-1)\}^2 = 0$ より，

$x(y+1)(x-1) = 0$ かつ $y(x+1)(y-1) = 0$

すなわち $\{x=0$ または $x=1$ または $y=-1\}$ かつ $\{x=-1$ または $y=0$ または $y=1\}$

よって，$(x,\ y) = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (-1,\ -1)$

23

(1)

$x^2=4x+2y$ ・・・①　$y^2=2x+4y$ ・・・②　とすると，

①－②より，$x^2-y^2=2x-2y$　$\therefore (x-y)(x+y-2)=0$

ゆえに，$x-y=0$ または $x+y-2=0$

$x-y=0$ すなわち $y=x$ のとき

①の y に x を代入し整理すると $x(x-6)=0$　$\therefore x=0,\ 6$

これと $y=x$ より，$(x,\ y)=(0,\ 0),\ (6,\ 6)$

$x+y-2=0$ すなわち $y=-x+2$ のとき

①の y に $-x+2$ を代入し整理すると $x^2-2x-4=0$　$\therefore x=1\pm\sqrt{5}$

これと $y=-x+2$ より，$(x,\ y)=\left(1+\sqrt{5},\ 1-\sqrt{5}\right),\ \left(1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5}\right)9$

以上より，$(x,\ y)=(0,\ 0),\ (6,\ 6)\left(1+\sqrt{5},\ 1-\sqrt{5}\right),\ \left(1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5}\right)$

(2)

与式は対称式だから，$x+y$ と xy （基本対称式）で表すと，

それぞれの与式は

$(x+y)^2+xy=11$　すなわち　$(x+y)^2+xy-11=0$ ・・・①

$(x+y)-xy=9$　すなわち　$xy=(x+y)-9$ ・・・②

②を①に代入し整理すると，$(x+y)^2+(x+y)-20=0$ より，$\{(x+y)-4\}\{(x+y)+5\}=0$

$\therefore x+y=4,\ -5$

これと②より，$(x+y,\ xy)=(4,\ -5),\ (-5,\ -14)$

$(x+y,\ xy)=(4,\ -5)$ のとき

$x,\ y$ は t についての 2 次方程式 $t^2-4t-5=0$ の解である。

これと $t^2-4t-5=(t+1)(t-5)$ および $x\leq y$ より，$(x,\ y)=(-1,\ 5)$

$(x+y,\ xy)=(-5,\ -14)$ のとき

$x,\ y$ は t についての 2 次方程式 $t^2+5t-14=0$ の解である。

これと $t^2+5t-14=(t-2)(t+7)$ および $x\leq y$ より，$(x,\ y)=(-7,\ 2)$

以上より，$(x,\ y)=(-1,\ 5),\ (-7,\ 2)$

24

解法 1

$x^2-3mx+2m^2<0$ の左辺を因数分解することにより，$(x-m)(x-2m)<0$ ・・・①

$2x^2-(m-4)x-2m<0$ の左辺を因数分解することにより，$(x+2)(2x-m)<0$ ・・・②

$m=0$ とすると式①は $x^2<0$ となり，連立不等式は解をもたない。

$m=-4$ とすると式②は $2(x+2)^2<0$ となり，連立不等式は解をもたない。

よって，$m\neq 0,\ m\neq 4$ の場合で考える。

$m>0$ のとき

①の解は $m<x<2m$，②の解は $-2<x<\dfrac{m}{2}$

これと $\dfrac{m}{2}<m$ より，解なし。

$-4<m<0$ のとき

①の解は $2m<x<m$　②の解は $-2<x<\dfrac{m}{2}$

よって，$2m<-1$ かつ $-1<m<0$ すなわち $-1<m<-\dfrac{1}{2}$ のとき整数解 -1 がただ 1 つ存在する。

$m<-4$ のとき

①の解は $2m<x<m$　②の解は $-2<x<\dfrac{m}{2}$

これと $m<-4$ より，解なし。

以上より，

整数解がただ 1 つとなるときの整数解は -1 で，そのときの m の範囲は $-1<m<-\dfrac{1}{2}$

解法 **2**：グラフを利用して解く。

$(x-m)(x-2m)<0$ となるためには， $x-m<0,\ x-2m>0$ または $x-m>0,\ x-2m<0$

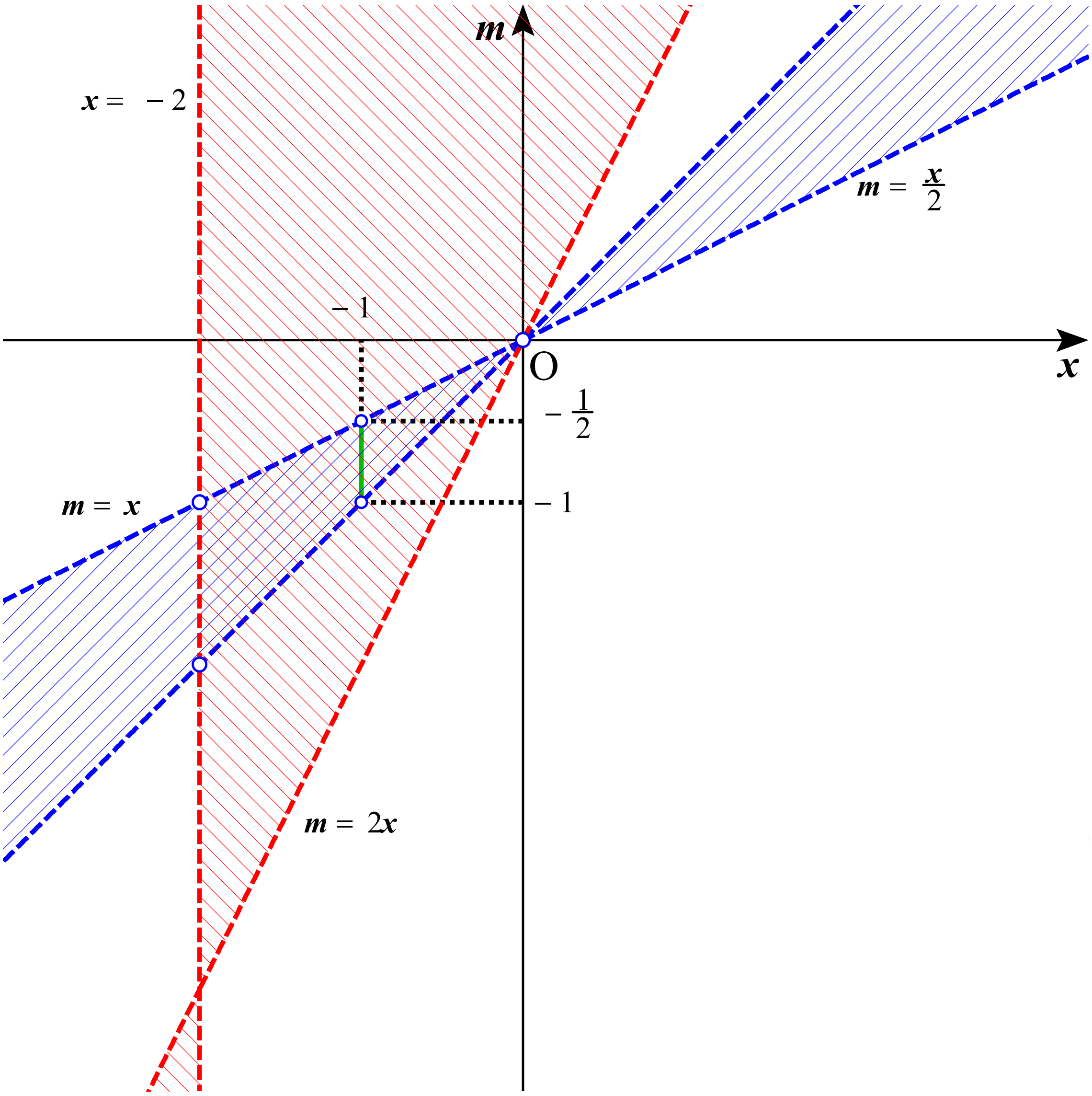
$(x+2)(2x-m)<0$ となるためには， $x+2<0,\ 2x-m>0$ または $x+2>0,\ 2x-m<0$

これをグラフで表すと次のようになる。

赤色斜線部と青色斜線部が重なった領域が連立不等式の解とそのときの m を表す。

したがって，解 x を固定すれば，それを解にもつ m の範囲がわかる。

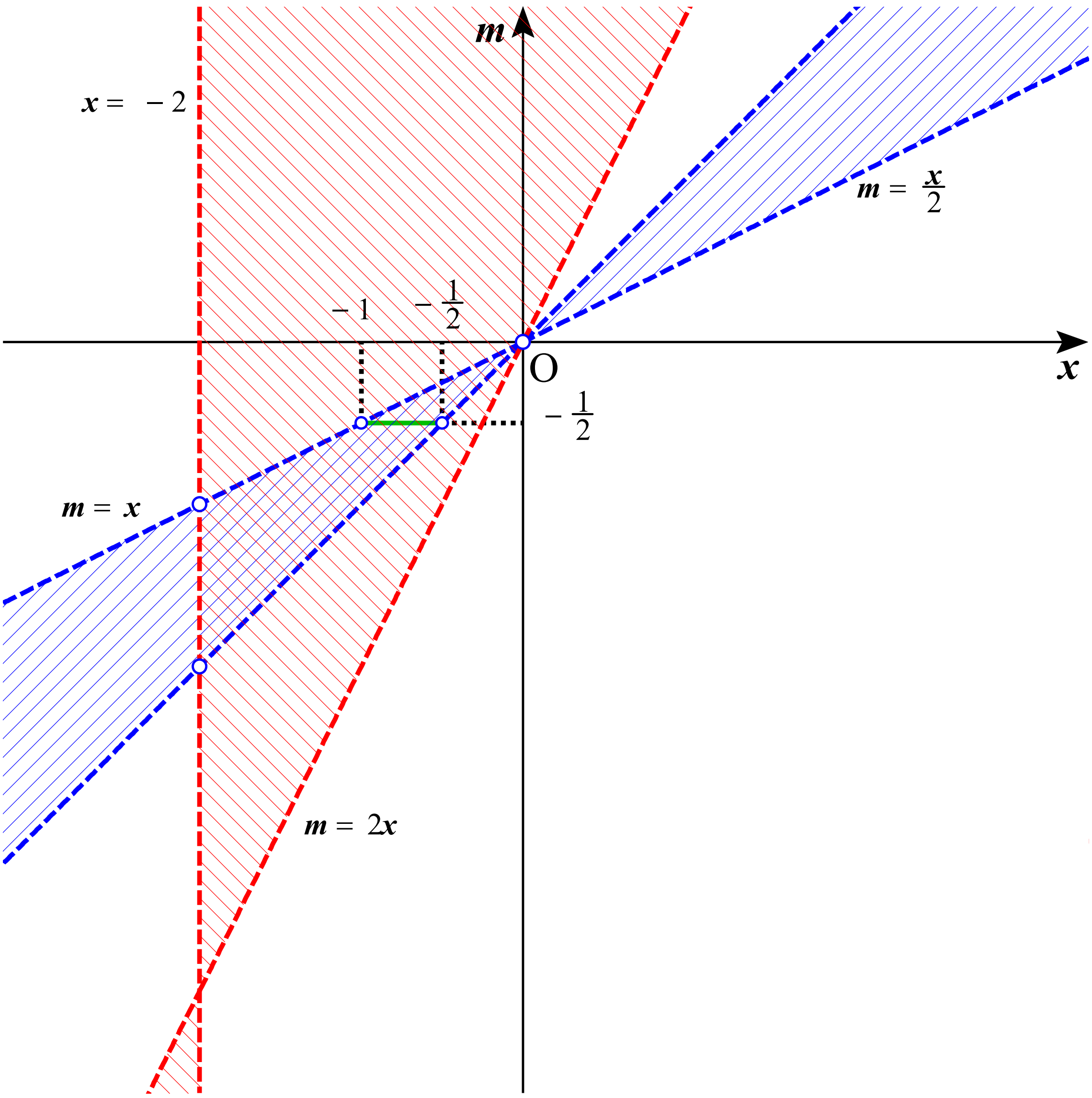
よって， $x=-1$ を解にもつときの m の範囲は，グラフから， $-1<m<-\frac{1}{2}$ である。



補足

同様に，m を固定すれば，連立不等式の解がわかる。

たとえば，$m=-\frac{1}{2}$ のときの連立不等式の解は $-1<x<-\frac{1}{2}$ である。



25

$$\begin{cases} x^2-(a+b^2)x-3a+a^2=0 \\ x^2+2ax+a^2+b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-(a+b^2)x-3a+a^2=0 \\ x^2+2ax+a^2+b^2-\{x^2-(a+b^2)x-3a+a^2\}=0-0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-(a+b^2)x-3a+a^2=0 \\ (3a+b^2)(x+1)=0 \end{cases}$$

$(3a+b^2)(x+1)=0$ より，$x=-1$ または $3a+b^2=0$

$x=-1$ が共通解のとき

$x^2-(a+b^2)x-3a+a^2=0$ を満たすから，$a^2-2a+1+b^2=0$ すなわち $(a-1)^2+b^2=0$

よって，$a=1,\ b=0$

$a>0$ を満たす。

$3a+b^2=0$ のとき

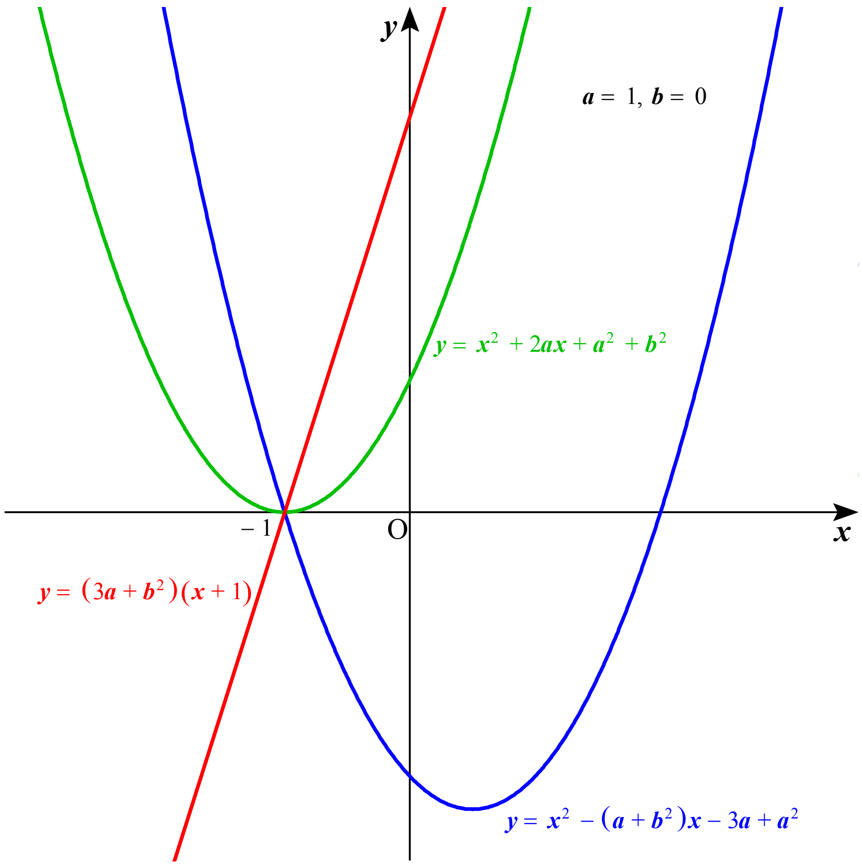
$b^2\geq 0$ より $a\leq 0$ ところが条件より $a>0$

よって，不適。

以上より，

$a=1,\ b=0$ のとき共通解 $x=-1$ をもつ。

補足



26

$x=0$ は与式を満たさないから解ではない。よって，$x \neq 0$ で考える。

両辺に $\dfrac{1}{x^2}$ を掛けると，$2x^2-9x-1-\dfrac{9}{x}+\dfrac{2}{x^2}=0$

これと

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)-1 \\
&= 2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}-9\left(x+\frac{1}{x}\right)-1 \\
&= 2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-9\left(x+\frac{1}{x}\right)-5 \\
&= \left\{2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-5\right\} \\
&= \frac{(2x^2+x+2)(x^2-5x+1)}{x^2}
\end{aligned}$$

より，$2x^2+x+2=0$ または $x^2-5x+1=0$

よって，これらを解くことにより，$\dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{4}$, $\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

27

$a=2$ のとき

$2x-2\geq 0 \quad \therefore x\geq 1$

続いて，$a\neq 2$ の場合で考える。

$$\begin{aligned}
(a-2)x^2+(4-a)x-2 &= (x-1)\{(a-2)x+2\} \\
&= (a-2)(x-1)\left(x+\frac{2}{a-2}\right)
\end{aligned}$$

より，

$$(a-2)(x-1)\left(x+\frac{2}{a-2}\right)\geq 0$$

$1=-\dfrac{2}{a-2}$ すなわち $a=0$ のとき

$-2(x-1)^2\geq 0$ より，$x=1$

$a<0$ のとき

$a-2<0$ より，$(x-1)\left(x+\dfrac{2}{a-2}\right)\leq 0$

これと $-\dfrac{2}{a-2}<1$ より，$-\dfrac{2}{a-2}\leq x\leq 1$

$0<a<2$ のとき

$a-2<0$ より，$(x-1)\left(x+\dfrac{2}{a-2}\right)\leq 0$

これと $-\dfrac{2}{a-2}>1$ より，$1\leq x\leq -\dfrac{2}{a-2}$

$2<a$ のとき

$a-2>0$ より，$(x-1)\left(x+\dfrac{2}{a-2}\right)\geq 0$

これと $-\dfrac{2}{a-2}<1$ より，$x\leq -\dfrac{2}{a-2},\ 1\leq x$

以上より，

$a<0$ のとき　$-\dfrac{2}{a-2}\leq x\leq 1$

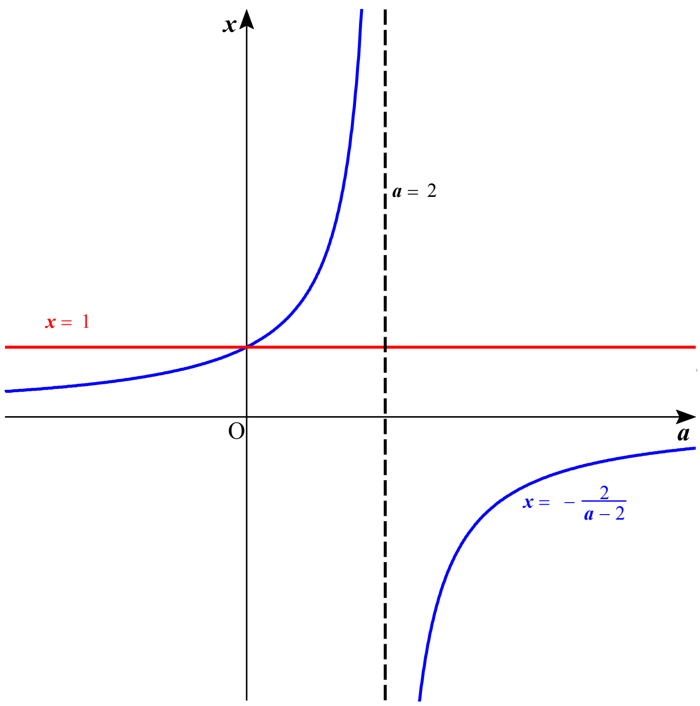
$a=0$ のとき　$x=1$

$0<a<2$ のとき　$1\leq x\leq -\dfrac{2}{a-2}$

$a=2$ のとき　$1\leq x$

$2<a$ のとき　$x\leq -\dfrac{2}{a-2},\ 1\leq x$

補足：1 と $-\dfrac{2}{a-2}$ の大小関係はあらかじめグラフで調べておくと楽



28

(1)

$x^2-\dfrac{4}{5}=x$ より，$\dfrac{1}{5}\left(5x^2-5x-4\right)=0$　$\therefore x=\dfrac{5\pm\sqrt{105}}{10}$

$\alpha<\beta$ より，$\alpha=\dfrac{5-\sqrt{105}}{10}$，$\beta=\dfrac{5+\sqrt{105}}{10}$

α は $f(x)=x$ の解だから，$f(f(\alpha))=f(\alpha)=\alpha$　$\therefore f(f(\alpha))=\dfrac{5-\sqrt{105}}{10}$

(2)

$$\begin{aligned}f(f(x))&=\{f(x)\}^2-\frac{4}{5}\\&=\left(x^2-\frac{4}{5}\right)^2-\frac{4}{5}\\&=x^4-\frac{8}{5}x^2-\frac{4}{25}\end{aligned}$$

より，

$$f(f(x))=x\Leftrightarrow x^4-\frac{8}{5}x^2-\frac{4}{25}=x$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{25}\left(25x^4-40x^2-25x-4\right)=0$$

$\therefore 25x^4-40x^2-25x-4=0$

$f(f(x))=x$ は $\alpha,\ \beta$ を解にもつから，$25x^4-40x^2-25x-4=0$ は $5x^2-5x-4$ で割り切れる。

そこで，割り算を実行すると，$25x^4-40x^2-25x-4=\left(5x^2-5x-4\right)\left(5x^2+5x+1\right)$

$\therefore\left(5x^2-5x-4\right)\left(5x^2+5x+1\right)=0$

これを解くと $x=\dfrac{5\pm\sqrt{105}}{10},\ \dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$

29

(1)

$\dfrac{14}{3}<x<5$ より，$[x]=4$

$2<\dfrac{3}{7}x<\dfrac{15}{7}$ より，$\left[\dfrac{3}{7}x\right]=2$

よって，

$$\begin{aligned}\left[\frac{3}{7}x\right]-\left[\frac{3}{7}[x]\right]&=2-\left[\frac{12}{7}\right]\\&=2-1\\&=1\end{aligned}$$

(2)

$\left[\dfrac{1}{2}x\right]=k$ とおくと，$k \leq \dfrac{1}{2}x < k+1$ より，$2k \leq x < 2k+2$

よって，$[x]$ は $2k$ または $2k+1$ となるから，$\dfrac{1}{2}[x]$ は k または $k+\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore \left[\dfrac{1}{2}[x]\right]=k$

ゆえに，$\left[\dfrac{1}{2}x\right]-\left[\dfrac{1}{2}[x]\right]=k-k=0$

(3)

$\left[\dfrac{1}{n}x\right]=m$ とおくと，$m \leq \dfrac{1}{n}x < m+1$ より，$mn \leq x < mn+n$

よって，$[x]$ は $mn,\ mn+1,\ \cdots,\ mn+n-1$ のいずれかである。

したがって，$\dfrac{1}{n}[x]$ は $m,\ m+\dfrac{1}{n},\cdots,\ m+\dfrac{n-1}{n}$ のいずれかであり，これより，$\left[\dfrac{1}{n}[x]\right]=m$

ゆえに，$\left[\dfrac{1}{n}x\right]-\left[\dfrac{1}{n}[x]\right]=m-m=0$